Lang leve de wiskunde

van Damme, E.E.C.

Published in:
Defacto: Periodiek van de Faculteit der Economische Wetenschappen KUB

Publication date:
1997

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Citation for published version (APA):
van Damme, E. E. C. (1997). Lang leve de wiskunde. *Defacto: Periodiek van de Faculteit der Economische Wetenschappen KUB*, *11*(5), 37-41.

Nobelprijs Economie voor de ontdekkers van *de* optie-formule:

Lang leve de wiskunde!

Op 15 oktober 1997 maakte de Zweedse Academie voor Wetenschappen bekend de Nobelprijs Economie dit jaar toe te kennen aan Robert C. Merton (Harvard) en Myron S. Scholes (Stanford) voor het ontwerpen van een nieuwe methode voor het bepalen van de waarde van financiële derivaten. Samen met de in 1995 overleden Fischer Black ontdekten de twee de formule voor het rationeel waarderen van opties, de zogenaamde Black Scholes formule. Met behulp van de door de prijswinnaars geïntroduceerde methode kunnen ook andere derivaten beter geprijsd worden, aldus wordt risico beter beheersbaar en kan meer in risicovolle projecten geïnvesteerd worden, waardoor de welvaart kan toenemen. In deze bijdrage gaan we in op het belang en de achtergronden van het werk van de winnaars[1].

Prof. dr. E.E.C. van Damme

DERIVATEN

Een derivaat is een 'asset' (financiële titel) waarvan de uitbetaling volledig bepaald wordt door de prijs of uitbetaling van een andere financiële titel. Het meest eenvoudige voorbeeld is een index-fonds. De AEX-index is een mandje met aandelen: in het AEX-mandje zitten een aantal aandelen Shell, een aantal aandelen Philips, een aantal aandelen Ahold, ect. De prijsbepaling van zo'n mandje is eenvoudig: de prijs moet precies gelijk zijn aan de waarde van de aandelen die erin zitten. De reden: als dat niet zo zou zijn dan zou er met behulp van arbitrage (oneindig grote) winst te behalen zijn. Denk bijvoorbeeld aan de situatie waarin het mandje twee aandelen, A met prijs *f*50,- en B met prijs *f*25,- bevat. Als het mandje goedkoper zou zijn dan *f*75,- zou ik winst kunnen maken door mandjes te kopen en de inhoud ervan afzonderlijk te verkopen. Als het mandje duurder is, kan ik winst maken door A en B separaat te kopen en deze gebundeld te verkopen.

Andere voorbeelden van derivaten zijn calls en puts. Een call-optie geeft het recht om binnen een bepaalde periode (voor een Amerikaanse optie) of op een bepaalde dag in de toekomst (voor een Europese optie) een aandeel tegen een van te voren afgesproken vaste prijs te kopen. Analoog geeft een put-optie het recht om het aandeel tegen een vaste prijs te verkopen. De recent in Nederland geïntroduceerde, en zeer populaire, click-fondsen vormen een ander voorbeeld. Zo'n Click-fonds is gerelateerd aan de index, het fonds biedt echter een extra verzekering: de koerswinst wordt op bepaalde niveau's vast geklikt; als de index die waarde eenmaal bereikt heeft dan is op de einddatum de uitbetaling nooit minder dan de hoogste click.

De vraag die zich nu stelt is wat de waarde is van zo'n derivaat. Wat is de waarde van het recht om voor 1 januari 2000 een aandeel Philips te mogen kopen voor *f*175,-? Wat is de waarde van een AEX-clickfonds met een looptijd van 5 jaar waarbij de koerswinst bij 10, 25 en 50 procent wordt vastgeclickt? Het is voor de oplossing van dit soort vragen dat Merton en Scholes dit jaar geëerd worden. Concreet lieten zij zien dat de oplossing verkregen kan worden door te veronderstellen dat geen arbitragewinst mogelijk is.

GESCHIEDENIS

Hoewel derivaten zich vooral de laatste twee decennia (na het verschijnen van de Black-Scholes formule) in een grote belangstelling mogen verheugen, zijn ze zeer zeker geen recente ontdekking.

Aristoteles verhaalt reeds over het gebruik ervan door de filosoof Thales van Milete[2]. Onder het motto "als je zo slim bent, waarom ben je dan niet rijk" werd de arme Thales door velen bespot en Thales besloot de anderen een lesje te leren. Thales zag in de sterren dat de volgende herfst de olijfoogst uitbundiger zou zijn dan ooit en ver van te voren onderhandelde hij met de eigenaren van de olijfpersen het recht om het eerst gebruik te mogen maken van die persen. De eigenaren beschikten niet over de voorkennis van Thales en zij waren bereid de optie tegen een geringe prijs te verlenen. Toen in de herfst de oogst binnenkwam en deze inderdaad uitbundig was, had Thales een monopolie op de persen en maakte hij een mooie winst.

In de Gouden Eeuw was Amsterdam het centrum van de wereld. Ook toen werden opties verhandeld. Zeer bekend is de crisis rond de handel in tulpenbollen. Deze crisis was vooral een crisis van de optiehandel: toen de bom barstte waren het vooral de prijzen van de call-opties (rechten om bollen te kopen tegen een bepaalde (hoge) prijs) die flink in waarde daalden.

De eerste wetenschappelijke onderzoeken naar rationele waardebepaling van opties werden vermoedelijk ondernomen door Louis Bachelier aan de Sorbonne in Parijs rond 1900. Bernstein's boek geeft veel details over deze originele denker die vermoedelijk ook als eerste de 'efficiënte markt hypothese' formuleerde en de gevolgen daarvan analyseerde. Bachelier schreef zijn proefschrift onder begeleiding van de grote wiskundige Henri Poincaré. Deze ontdekte een foutje in het werk en oordeelde er daarom min over, met als gevolg dat Bachelier nergens een goede positie kreeg en zijn baanbrekende werk verloren dreigde te gaan. Het proefschrift werd echter teruggevonden door de statisticus Jimmy Savage die het ter lezing aan Paul Samuelson gaf. Samuelson was zeer onder de indruk van het werk en werd er door gestimuleerd op zoek te gaan naar de "gouden formule". Hij faalde echter: Samuelson kon het algemene probleem niet oplossen, hij bleef (in 1965) steken in een speciaal geval. Dit is een van de weinige keren dat Samuelson niet in staat was een probleem (voor hemzelf) bevredigend op te lossen. Die ervaring moet heel frustrerend geweest zijn.

Tot het midden van de jaren '60 was er dus geen goede waardebepaling van opties en bijgevolg waren er geen formele markten. Opties werden wel verhandeld, maar 'over the counter', de prijs werd bilateraal onderhandeld. Bernstein, zelf eigenaar van een investeringsadviesbedrijf, verhaalt waarom zulke handel plaats vond: 'we sold options (...) because the belief among professionals was that the speculators who bought calls were characteristically over optimistic and tended to pay too much for them. In selling calls we were betting that the greed of the buyers would give us a built-in advantage". De concurrentie tussen investeringsadviseurs om zoveel mogelijk winst te maken leidde naar de vraag tot een meer rationele bepaling van de waarde van opties. Bij Arthur D. Little kwam de vraag op het bord van Fischer Black. Samen met zijn academische collega Myron Scholes slaagde hij erin de oplossing te vinden[3]. Tijdens het zoekproces kregen ze veel hulp van Robert Merton, een promovendus van Samuelson. Black heeft dan ook gesteld dat de formule veel beter onder de naam 'Black-Merton-Scholes formule' door het leven zou kunnen gaan.

WAARDEBEPALING VAN AANDELEN EN OPTIES

Wat bepaalt de waarde van een aandeel? Een aandeel geeft recht op een deel van de uitgekeerde winst, het traditionele antwoord op de bovenstaande vraag is dan ook: de waarde van een aandeel is gelijk aan de totale verwachte verdisconteerde som van toekomstige winstuitkeringen (dividenden). Omdat de toekomst onzeker is en verwachtingen en risicohoudingen verschillen geeft dit antwoord weinig houvast bij de concrete waardebepaling. De waarde van een aandeel kan dan ook sterk verschillen van de intrinsieke waarde. Een beter antwoord op de oorspronkelijke vraag is dan ook: dat wat de gek, de markt in dit geval, er voor geeft. De waarde van een aandeel is de prijs waarbij de vraag gelijk is aan het aanbod ervan.

Deze prijs hangt af van hoe risico-vol een aandeel is en hoe risico-mijdend de populatie is waarin het aandeel verhandeld wordt. Beschouw, als een aardig voorbeeld, een aandeel in een project dat ofwel *f*100,- oplevert (met kans 1/2) ofwel niets (ook met kans 1/2). Wat is de waarde van dit project? Voor hoeveel ben jij bereid dit project te kopen? De verwachte waarde van het project is *f*50,-, maar de meeste mensen zijn risico-avers en hebben liever *f*50,- (of zelfs *f*40,-) met zekerheid dan een aandeel in het project. Hoe meer risico-avers, hoe minder iemand bereid is te betalen. Hoe meer risico-mijdend de bevolking is, hoe lager de prijs van de aandelen. Het bovenstaande illustreert dat over de prijsvorming van aandelen wellicht weinig concreets te zeggen is. De paradox (?) is nu dat over de prijsbepaling van derivaten van aandelen zeer veel te zeggen is: het 'no arbitrage principe' impliceert dat de

$$C = SN(d) - Ee^{-rt}N(d - \sigma\sqrt{t})$$

Formule 2a

waarde van de optie volledig door de waarde van het aandeel (en exogene factoren) bepaald is.

HET "NO-ARBITRAGE" PRINCIPE[4]

In de Achterhoek staan een boertje en een Amsterdamse yup op de bus te wachten. Het boertje stelt voor een spelletje te doen om de tijd te doden. Achtereenvolgens stelt elk een vraag. Als de ander het goede antwoord niet kent betaalt hij *f* 1,- aan de vraagsteller. De yup gaat accoord, maar waarschuwt het boertje: "Ik studeer economie dus weet veel.". Oh, zegt het boertje, dan passen we de regels toch aan: jij betaalt mij het dubbele als je het antwoord niet weet. De zelfverzekerde yup gaat accoord en het boertje stelt de eerste vraag: "Wat gaat op 7 poten de heuvel op, maar komt op 3 poten naar beneden?". De yup moet het antwoord schuldig blijven. Het boertje geeft grif toe het antwoord ook niet te weten, maar wil wel graag de ene gulden incasseren.

Het "no-arbitrage"-principe stelt eenvoudig dat zulke spelletjes, waarbij men zeker winst maakt, op een goed functionerende beurs niet mogelijk zijn. Het principe impliceert dat de prijzen van vermogenstitels aan bepaalde relaties moeten voldoen. Simpelweg gezegd: twee assets die hetzelfde opleveren moeten ook hetzelfde kosten. Met dit eenvoudige principe kan de optieprijs bepaald worden. We geven een eenvoudig voorbeeld.

Stel een aandeel, dat nu *f* 100,- kost, is volgende periode ofwel *f* 200,- waard (met kans q) ofwel *f* 50,- (met kans $1 - q$). Ik kan nu een optie kopen die mij het recht geeft om volgende periode het aandeel te kopen voor een prijs E, met $50 < E < 200$. Als het aandeel in prijs halveert, is de optie waardeloos; in het andere geval is de waarde van de optie $200 - E$. Wat is de optie nu waard? Het antwoord wordt eenvoudig gevonden als men zich realiseert dat men een portefeuille van aandelen en opties kan samenstellen die een constante winst garandeert. Veronderstel dat ik nu 1 aandeel koop en $150 / (200 - E)$ opties verkoop. Als het aandeel volgende periode laag staat, levert deze portefeuille *f* 50,- op: de opties worden in dat geval niet uitgeoefend. In het andere geval levert het aandeel *f* 200,- op en moet ik de opties leveren. Omdat elke optie in dit geval een verlies oplevert van $200 - E$ is de totale netto opbrengst ook in dit geval *f* 50,-. Stel dat de rentevoet gelijk aan r is. Een andere manier om volgende periode ook altijd *f* 50,- te hebben is nu $50 / (1 + r)$ in een risicoloze obligatie te investeren. Arbitrage is alleen dan niet mogelijk als deze twee beleggingsstrategieën, die dezelfde opbrengst hebben, ook dezelfde kosten hebben, dat wil zeggen, als

$$50 / (1 + r) = 100 - 150\, C / (200 - E)$$

waarin C de prijs van de opties is. Ofwel

$$C = (1 + 2r)(200 - E) / 3(1 + r) \qquad (1)$$

Merk op dat de waarde van de call-opties dalend is in de uitoefenprijs E en stijgend in de rente-voet r. De call-prijs is onafhankelijk van de kans dat het aandeel stijgt en van de risico-houding van de beleggers.

DE BLACK-SCHOLES FORMULE

Black, Merton en Scholes losten het bovenstaande probleem op in een algemener context: er is nu meer dan 1 periode en de verdeling van de aandelenprijs wordt gegeven door een ingewikkelder stochastisch proces. De oplossingsmethodiek is dezelfde als in het bovenstaande: creëer met behulp van aandeel en optie een risicoloze portefeuille. Omdat de waarde van het aandeel en die van de risicoloze portefeuille bekend zijn, kan de waarde van de optie bepaald worden. Het geheel wordt nu wiskundig aanmerkelijk ingewikkelder omdat de handelsstrategie dynamisch moet zijn, de portefeuille moet in de tijd worden aangepast. Een en ander impliceert dat de prijs van de optie moet voldoen aan een ingewikkelde differentiaalvergelijking. Hoewel Black opgeleid was als toegepast wiskundige, heeft hij toch een drietal jaar op de formule zitten staren alvorens hij de oplossing had. De oplossing voor een Europese call-optie is formule 2a, waarin d gelijk is aan formule 2b. Verder stelt N de normale verdeling voor, S de huidige aandelenprijs, t de tijd tot experatie van de optie, σ de volatiliteit van het aandeel en E en r als in (1). Alle parameters uit deze vergelijking zijn bekend, behalve σ die uit marktdata geschat kan worden.

$$d = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

Formule 2b

BELANG EN GEBRUIK

Nog voor de formule gepubliceerd werd, begonnen optiehandelaren deze te gebruiken. Het duurde niet lang of een optiehandelaar kon niet meer zonder de formule. De markt floreerde ook dankzij het gebruik van de formule. De optiebeurs in Chicago begon in 1973, op de eerste dag werden 911 opties verhandeld. Nu heeft wereldwijd de optiebeurs de aandelenbeurs overvleugeld. Een leek vraagt in zo'n situatie altijd: wat is het nut van zo'n beurs? Hebben Black, Merton en Scholes iets uitgevonden waar alleen beursspeculanten iets aan hebben, of profiteer ik er ook van?

Het antwoord op deze laatste vraag is: Ja. Veel Nederlanders maken gebruik van Click-fondsen en deze zouden zonder het pionierswerk van de Nobelprijswinnaars van dit jaar nooit zo'n grote vlucht hebben kunnen nemen. Het belang van de optie-beurs is nog groter. Wereldwijd worden economieën gedereguleerd, in de overtuiging dat markten beter werkten dan overheden. Dit geloof is gebaseerd op de eerste hoofdstelling uit de welvaartseconomie en deze veronderstelt een volledig herstel van markten. Aandelenmarkten zijn niet volledig, niet alle risico's kunnen erop worden afgedekt. Zoals Nobelprijswinnaar Ken Arrow in de jaren '50 reeds liet zien kunnen optiebeursen markten completeren en aldus tot Pareto verbeteringen leiden.

Gegeven het bovenstaande is het misschien niet vreemd dat Black en Scholes in eerste instantie vooral aan de academische markt dachten en niet aan de financiële: ze waren meer geïnteresseerd in publicatie van de resultaten dan in het gebruik ervan. Zoals vaak werd ook dit baanbrekende artikel eerst diverse malen geweigerd, alvorens het in 1973 verscheen in het Journal of Political Economy.

De auteurs begonnen ook te handelen op basis van hun formule. In het begin waren substantiële winsten mogelijk, naarmate ook meer anderen van de formule gebruik maakten liepen de winsten echter terug: men moet de markt steeds een stap voor zijn. Pogen slimmer te zijn dan de markt houdt echter ook risico's in. Black omschrijft de algemene les die ze leerden als volgt: "The formula and the volatility estimates we put into the formula are always based on the information at hand. The market will always have some kinds of information that we don't have. Sometimes the values given by the formula will be better than the formula values". Er blijft dus ruimte voor inzicht.

CONCLUSIE

Het verhaal van de Black, Merton, Scholes formule is het succesverhaal van de economie van de afgelopen 25 jaar. Zoals Bernstein in "Capital Ideas" duidelijk maakt, is het ook het succesverhaal van de wiskunde in de economie. Zonder wiskunde zou Wall Street niet zijn wat het nu is. Als economen ontkomen we er daarom (helaas!) niet aan ons deze wiskunde eigen te maken. Net zoals de markt de handelaren op Wall Street en het Damrak dwingt van de Black Scholes formule gebruik te maken, zo dwingt de markt de student economie ook om zich differentiaalvergelijkingen en lineaire algebra eigen te maken. Zonder dit gereedschap is een goed begrip van de moderne economie niet mogelijk. Hoe vervelend dat ook moge zijn.

NOTEN

1 Zie ook de homepage van het Nobel committee: www.nobelprizes.com

2 De anecdote is overgenomen uit Peter Bernstein "Capital Ideas: The improbable origins of modern wall-street" (The Free Press, 1992). Het boek beschrijft hoe wiskunde en economische ideeën de moderne financiële wereld vormden. Hoofdstuk 11 is aan derivaten gewijd.

3 Voor meer details, zie F. Black: How we came up with the option formula. J. Portfolio Management, 15 (1989), 4-9.

4 Gebaseerd op H. Varian: The arbitrage principle in financial economics. J. Econ. Perspectives, 1 (1987), 55-72.